

Filtracja pomiarów z głowic laserowych

słowa kluczowe: filtracja pomiaru odległości, PNDS

Założenia filtracji pomiaru odległości.

Problem wyznaczenia odległości i parametrów ruchu mierzonego punktu kadłuba dotyczy oszacowania chwilowego stanu układu dynamicznego na podstawie pomiarów tego stanu, przy założeniu, że zarówno pomiar, jak i sam proces przetwarzania wewnątrz układu są obarczone błędem. Rozwiązanie tego problemu możliwe jest poprzez zastosowanie filtru Kalmana lub inaczej rekurencyjnego algorytmu dyskretnej liniowej filtracji [1,2,3]. Zakłada się, że zakłócenia i błędy pomiarów są białym szumem typu gaussowskiego. W takim wypadku problem pomiarów odległości za pomocą czujnika laserowego dotyczy oszacowania stanu $x \in \mathfrak{R}^n$ dyskretnego procesu, który jest opisywany przez następujące stochastyczne równanie liniowe w chwili k (model dynamiki stanu):

$$x_k = A_{k-1} \cdot x_{k-1} + w_k \quad (1),$$

natomiast model pomiaru $z \in \mathfrak{R}^m$ jest opisany następująco:

$$z_k = H_k \cdot x_k + v_k \quad (2),$$

gdzie:

A_{k-1} - macierz przejścia ($n \times n$) wiążąca stan układu w chwili $k-1$ ze stanem w chwili k ,

H_k - macierz ($m \times n$) wiążąca stan x_k z pomiarem z_k w chwili k ,

w_k, v_k - zmienne losowe, reprezentujące błąd (szum) przetwarzania (procesu) i pomiaru,

których funkcje rozkładu prawdopodobieństwa są typu gaussowskiego (zmienne o rozkładzie normalnym):

$p(w_k) \approx N(0, Q_k)$, $p(v_k) \approx N(0, R_k)$, a funkcje gęstości prawdopodobieństwa są równe:

$$f(w_k) = \frac{1}{\sigma_{wk} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(w_k - \mu_{wk})^2}{2\sigma_{wk}^2}\right], \quad f(v_k) = \frac{1}{\sigma_{vk} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v_k - \mu_{vk})^2}{2\sigma_{vk}^2}\right] \quad (3),$$

gdzie:

Q_k - miara zmienności białego szumu definiowanego zmienną w_k , dla rozkładu normalnego równa wariancji σ_{wk}^2 ,

R_k - miara zmienności białego szumu definiowanego zmienną v_k , dla rozkładu normalnego równa wariancji σ_{vk}^2 ,

μ_{wk}, μ_{vk} - parametry wartości średnich błędu przetwarzania i pomiaru,

σ_{wk}, σ_{vk} - parametry odchyłeń standardowych błędu przetwarzania i pomiaru,

Niech $\hat{x}_k^- \in \mathfrak{R}^n$ oznacza estymatę *a priori* stanu układu x_k w chwili k , czyli wiedzę o procesie przed tym momentem, oraz $\hat{x}_k^+ \in \mathfrak{R}^n$ oznacza estymatę *a posteriori* stanu w chwili k , czyli wiedzę na podstawie pomiaru z_k :

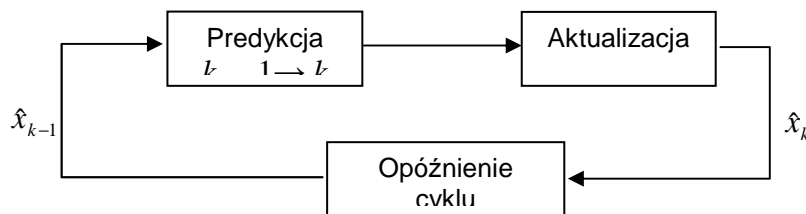
$$\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1}^+ \quad (4)$$

Na tej podstawie można zdefiniować estymaty błędu e_k *a priori* i *a posteriori* oraz odpowiadające im macierze kowariancji P_k :

- estymaty *a priori*: $e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-$, $P_k^- \equiv E[e_k^- \cdot e_k^{-T}]$, (5)

- estymaty *a posteriori*: $e_k^+ \equiv x_k - \hat{x}_k^+$, $P_k^+ \equiv E[e_k^+ \cdot e_k^{+T}]$. (6)

Zasada rekurencji dla filtru Kalmana polega na tym, że w danej chwili k -tej, dokonywany jest pomiar stanu z_k , na podstawie którego oraz estymaty *a priori* w chwili $k-1$ wyznaczana jest estymata *a posteriori* \hat{x}_{k-1}^+ . Służy ona następnie do predykcji estymaty stanu \hat{x}_k^- w następnym, k -tym momencie. A zatem równania opisujące filtr Kalmana dzielą się na dwie kategorie: równania aktualizujące w chwili $k-1$ oraz równania predykcyjne dla chwili k .



Rys. 1. Schemat modelu predykcyjno-aktualizacyjnego filtru Kalmana.

W związku z powyższym otrzymujemy pięć równań Kalmana:

1. równanie ekstrapolacji stanu (4):

$$\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1}^+ \quad (7)$$

2. równanie ekstrapolacji kowariancji błędu procesu:

$$P_k^- = A_k P_{k-1}^+ A_k^T + Q_k \quad (8)$$

3. równanie wzmocnienia:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (9)$$

4. równanie aktualizacji stanu:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k^-] \quad (10)$$

5. równanie aktualizacji kowariancji błędu procesu:

$$P_k^+ = [I - K_k H_k] P_k^- \quad (11)$$

gdzie:

I - macierz jednostkowa o wymiarze P_k , a indeks T oznacza transponowanie macierzy

Symulacja filtracji pomiaru odległości.

Przykładowy algorytm symulacji filtracji pomiaru odległości sensorem laserowym zaimplementowany w środowisku MATLAB[®] na podstawie [2] przedstawiono poniżej:

```
function kalman_dist(duration, dt)

% function kalman_dist(duration, dt) - symulacja filtru Kalmana
% duration = czas trwania symulacji [s]
% dt = odstęp pomiarowy [s]
% dists = początkowa odległość [m]

measnoise = 1; % odchylenie st. - błąd pomiaru odległości [m]
accelnoise = -0.01; % zmienność stanu reprezentowana przyspieszeniem
procesu [m/sec^2]
dists = 10;

A = [1 dt; 0 1]; % macierz przejścia
H = [1 0]; % macierz wiążąca stan x z pomiarem
x = [dists; 0]; % początkowy wektor stanu
xest = x; % początkowa estymata stanu

Q = accelnoise^2 * [dt^4/4 dt^3/2; dt^3/2 dt^2]; % m. kowariancji błędu
oszacowania procesu zmiany stanu (odległości) w wyniku ruchu kadłuba
P = Q; % m. kowariancji początkowej estymacji
R = measnoise^2; % m. kowariancji błędu pomiaru

% ustalenie rozmiaru wektora innowacji
Inn = zeros(size(R));

pos = []; % macierz rzeczywistych odległości
posest = []; % macierz estymowanych odległości
posmeas = []; % macierz pomiarów

Counter = 0;
for t = 0 : dt: duration,
    Counter = Counter + 1;
    % Symulacja procesu
    ProcessNoise = accelnoise * randn * [(dt^2/2); dt];
    x = A * x + ProcessNoise;
    % Symulacja pomiaru
    MeasNoise = measnoise * randn;
    z = H * x + MeasNoise;
    % Innowacja
    Inn = z - H * xest;
    % Kowariancja innowacji
    s = H * P * H' + R;
    % Macierz wzmocnienia
    K = A * P * H' * inv(s);
    % Estymata stanu
    xest = A * xest + K * Inn;
    % Kowariancja błędu predykcji
    P = A * P * A' + Q - K * H * P * A';
    % Zapis parametrów odległości, ich estymat i pomiarów
    pos = [pos; x(1)];
    posest = [posest; xest(1)];
    posmeas = [posmeas; z];
end
```

```

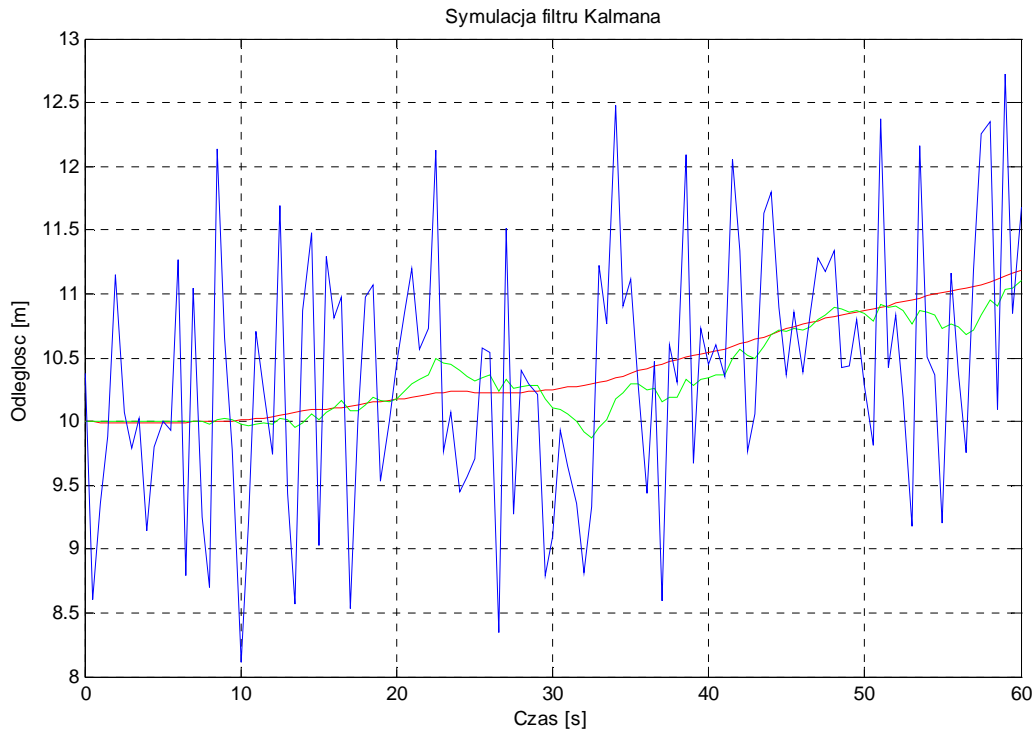
% Wykres symulacji
t = 0 : dt : duration;
t = t';
plot(t,pos,'r',t,posest,'g',t,posmeas,'b');
grid;
xlabel('Czas [s]');
ylabel('Odleglosc [m]');
title('Symulacja filtru Kalmana');

```

W powyższym algorytmie ruch mierzonego punktu kadłuba zasymulowano poprzez dobór parametrów macierzy A i wektora $ProcessNoise$. Macierz A jest macierzą przejścia układu ze stanu poprzedniego do bieżącego w okresie dt , wektor $ProcessNoise$ jest wektorem chwilowego przyspieszenia uzmiennionego według rozkładu normalnego funkcją $randn$. Problem wyznaczenia odległości i parametrów ruchu mierzonego punktu kadłuba dotyczy oszacowania chwilowego stanu układu dynamicznego na podstawie pomiarów tego stanu, przy założeniu, że zarówno pomiar, jak i sam proces przetwarzania wewnątrz układu są obarczone błędem. Rozwiązanie tego problemu możliwe jest poprzez zastosowanie filtru Kalmana lub inaczej rekurencyjnego algorytmu dyskretnej liniowej filtracji [1,2,3]. Zakłada się, że zakłócenia i błędy pomiarów są białym szumem typu gaussowskiego. W takim wypadku problem pomiarów odległości za pomocą czujnika laserowego dotyczy oszacowania stanu $x \in \mathfrak{R}^n$ dyskretnego procesu, który jest opisywany przez następujące stochastyczne równanie liniowe w chwili k (model dynamiki stanu):

1. czas symulacji równy 60s;
2. $dt = 0,5s$;
3. początkowa odległość równa 10m;
4. odchylenie standardowe pomiaru odległości równe 1m;
5. odchylenie standardowe przyspieszenia (w procesie ruchu) równe $0,01m/s^2$;
6. zmienne odległości i przyspieszenia generowane według rozkładu normalnego.

Kolorem czerwonym oznaczono rzeczywiste odległości, kolorem niebieskim pomierzone odległości, kolorem zielonym odległości estymowane filtrem Kalmana.



Rys. 2. Symulacja filtracji pomiaru odległości sensorem laserowym.

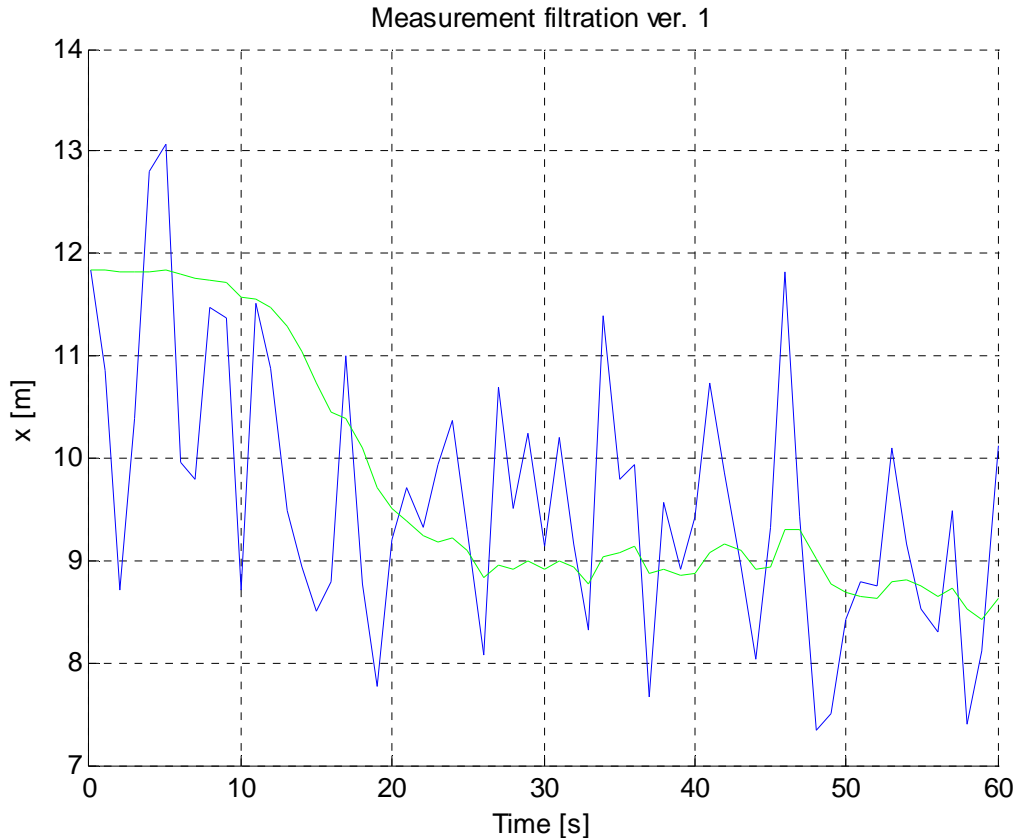
Filtracja pomiarów rzeczywistych odległości.

W algorytmie filtracji rzeczywistych pomiarów symulację procesu i pomiaru w algorytmie z rozdz. 2 zastąpią rzeczywiste dane pomiarowe.

Rysunek 3 przedstawia pracę zbudowanego filtra w środowisku MATLAB® dla parametrów:

1. czas symulacji równy 60s;
2. $dt = 1s$;
3. początkowa odległość równa 10m;
4. odchylenie standardowe pomiaru odległości równe 1m;
5. odchylenie standardowe przyspieszenia (w procesie ruchu) równe $0,01m/s^2$;
6. pomiary odległości uzyskane z głowicy powiększone 10-krotnie dla przyjętego odch. standardowego pomiarów.

Na rys. 3 kolorem niebieskim oznaczono pomierzone odległości, kolorem zielonym odległości estymowane filtrem Kalmana.



Rys. 3. Filtracja pomiaru odległości sensorem laserowym – wersja pierwsza.

Rzeczywiste pomiary z głowicy laserowej obejmują także pochodną odległości po czasie - prędkość zmiany odległości (v). Modyfikując macierz przejścia A do postaci:

$$A = [1 \quad dt \quad v(t+1)/dt; \quad 0 \quad 1 \quad dt; \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

oraz macierz kowariancji błędu oszacowania procesu zmiany stanu (odległości) w wyniku ruchu kadłuba Q do postaci:

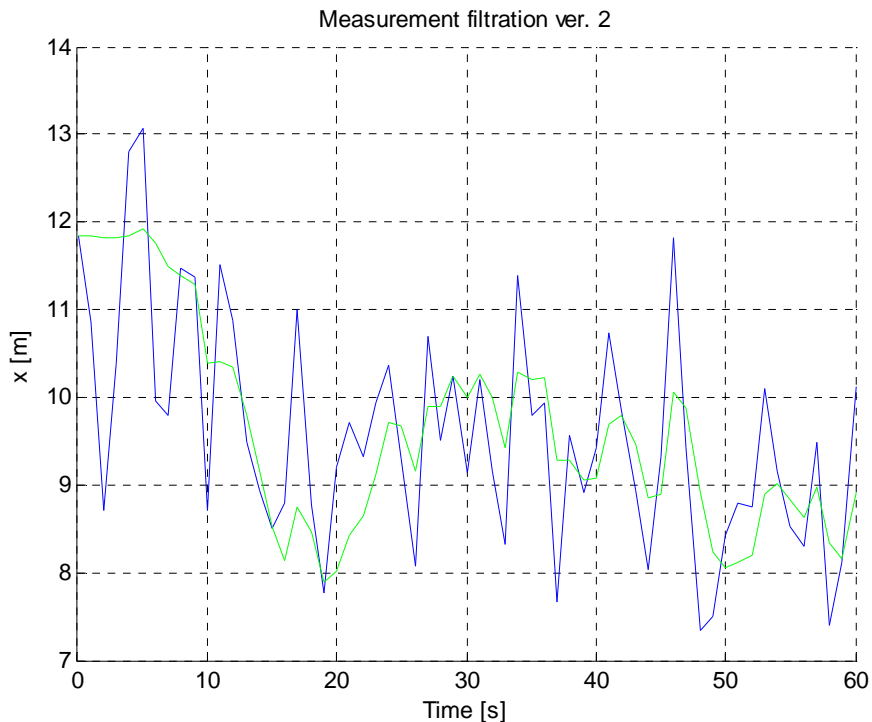
$$Q = \text{accelnoise}^2 * [dt^4/4 \quad dt^3/2 \quad dt^2; \quad dt^3/2 \quad dt^2 \quad 1; \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

algorytm filtracji będzie wierniejszy rzeczywistości.

Rysunek 4 przedstawia pracę zbudowanego filtra w środowisku MATLAB® dla parametrów:

1. czas symulacji równy 60s;
2. $dt = 1s$;
3. początkowa odległość równa 10m;
4. odchylenie standardowe pomiaru odległości równe 1m;
5. odchylenie standardowe przyspieszenia (w procesie ruchu) równe $0,01m/s^2$;
6. pomiary odległości uzyskane z głowicy powiększone 10-krotnie dla przyjętego odch. standardowego pomiarów,
7. pomiary prędkości uzyskane z wartości aproksymowanych przez głowicę laserową jej algorytmem filtracyjnym.

Na Rys. 4 kolorem niebieskim oznaczono pomierzone odległości, kolorem zielonym odległości estymowane filtrem Kalmana.



Rys. 4. Filtracja pomiaru odległości sensorem laserowym – wersja druga

Podsumowanie

Przedstawione wersje algorytmu filtracji pomiarów odległości głowicami laserowymi umożliwiają korektę chwilowych błędów pomiarów w różnych wariantach systemów pomiarowych. Wersja pierwsza opiera się wyłącznie na mierzonych odległościach. Wersja druga bierze pod uwagę dodatkowo rejestrowane chwilowe prędkości. Możliwość fuzji pomiarów różnych parametrów prowadzi do poprawy jakości stosowanego filtra, a tym samym dokładności estymowanych pomiarów.

LITERATURA

- [1] Kalman R., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transactions of the ASME, Journal of Basing Engineering, vol. 82, March 1960, pp. 34-35.
- [2] Simons D., *Kalman Filtering with State Constraints: A Survey of Linear and Nonlinear Algorithms*, Cleveland State University Department of Electrical and Computer Engineering, IET Control Theory & Applications, 2009.
- [3] Welch G., Bishop G., *An Introduction to the Kalman Filter*, Transactions 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina, Chapel Hill, NC 27599-3175, 2002.

